**Anders Weber** 



Vernetztes Kopfrechnen auf der Mittelstufe



# **Anders Weber**



Vernetztes Kopfrechnen auf der Mittelstufe



© 2013 by ZKM

Verlag der Zürcher Kantonalen

Mittelstufenkonferenz

Frauenfelderstrasse 21 a

8404 Winterthur

www.verlagzkm.ch

ISBN 978-3-03794-226-0

Gestaltung und Produktion: Samuel Gubler lüthi electronic ag 8401 Winterthur www.luethidesign.ch

Alle Rechte vorbehalten

Dieses Lehrmittel ist klimaneutral.

myclimate hat berechnet, wie viele klimawirksame Emissionen bei der Herstellung angefallen sind. Für diesen Ausstoss an Treibhausgasen wurden Reduktionen aus den myclimate-Klimaschutzprojekten gekauft. So wird dieselbe Menge an klimawirksamen Emissionen aus der Produktion des Lehrmittels wieder eingespart.

Inhalt gedruckt auf Cyclus Print, hergestellt aus 100% Altpapier.

Umschlag gedruckt auf Eco Board GD2, FSC Mix, Recyclingkarton, einseitig gedeckt und gestrichen.

Printed in Switzerland

# INHALTSVERZEICHNIS

4	Der Autor und Dank des Verlages
5	Vorwort
6	Materialübersicht
7	Schnellstart: Kurzanleitung
8	Anleitung
15	Kopiervorlagen
17	1×1-Testserien
21	1 × 1-Trainingskärtchen
27	Quartettspiel bis 100
31	Quartettspiel bis 200
36	Quartettspiel bis 400
40	Quartettspiel bis 1000
45	7-Minuten-Trainings bis 100
47	7-Minuten-Tests bis 100
49	3-Minuten-Trainings bis 200
51	3-Minuten-Tests bis 200
53	3-Minuten-Trainings bis 1000
55	3-Minuten-Tests bis 1000
57	Training der Quadratzahlen der Zahlen bis 25

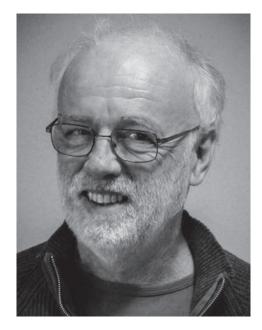




#### **Anders Weber**

Nach einer kaufmännischen Lehre zog es Anders Weber bald wieder auf die Schulbank, wo er 1972 bei der Kantonalen Maturitätsschule für Erwachsene (KME) im ersten Jahrgang dieser Schule abschloss. Nach einer längeren Reise liess er sich zum Primarlehrer ausbilden und arbeitete seit 1977 hauptsächlich auf der Mittelstufe in Thalwil-Gattikon. Seit einiger Zeit ist er pensioniert und widmet sich anderen Dingen, die ihm Spass machen. So erteilt er unter anderem Kurse in autogenem Training.

Während seiner pädagogischen Tätigkeit war es ihm immer ein grosses Anliegen, die Kinder mehr nach ihren Fähigkeiten und Möglichkeiten zu fördern. Anfang der Achtzigerjahre stiess er auf den Werkstatt-Unterricht, der damals noch sehr wenig bekannt war. Er schuf mehrere Werkstätten und gelangte schliesslich an den ZKM, um die gute Idee weiter zu verbreiten und zu entwickeln. Als Autor und Begleiter neuer Werkstätten machte er den Verlag ZKM über mehrere Jahre zum Verlag für Werkstätten schlechthin. Auf den Werkstatt-Unterricht folgte der Wochen-



plan-Unterricht. Anders Weber gab während vieler Jahre Fortbildungskurse für Lehrer und Lehrerinnen zu Werkstatt- und Wochenplan-Unterricht und entwickelte gleichzeitig Materialien für individuelles und selbstgesteuertes Lernen. Vor allem im Bereich Kopfrechnen entstanden mehrere Werke, welche er in seinem Verlag LernZiel Thalwil veröffentlichte.

# DANK DES VERLAGES

Die Freude war gross, als sich Anders Weber beim Verlag ZKM meldete und sein neues Lehrmittel «1 × 1-Training» vorstellte. Er war uns aus den Achtzigerjahren als Autor bei den damals neu aufgekommenen Werkstätten bekannt, hatte er doch zu dieser Zeit stark mitgeholfen, die offene Arbeitsweise in die Schweizer Schulzimmer zu bringen.

Mit seinem aktuellen Lehrmittel zum Kopfrechnen schliesst er eine grosse Lücke im Lehrmittelangebot. Wir sind überzeugt, dass die Schülerinnen und Schüler dadurch vermehrt mit den Zahlen jonglieren und darin immer sicherer werden. Die Lehrkräfte erhalten ein System, mit wel-

chem über drei Jahre fundiert am Grundzahlverständnis gearbeitet werden kann. Mit Freude, Tricks und Kniffs kopfrechnen soll jedem gegönnt sein!

Herzlichen Dank, Anders, für dein durchdachtes und gut aufbereitetes Werk!

Für den Verlag ZKM Res Gnehm



Das 1×1 bietet eine ausgezeichnete Möglichkeit, Gedächtnis und Zahlenverständnis zu trainieren. Nachdem die Kinder in der zweiten und dritten Klasse das kleine 1×1 gelernt haben und die Reihen mehr oder weniger problemlos aufsagen können, ist ein weiterführendes Training angezeigt. Mit Hilfe der vorliegenden Trainingsund Übungsmaterialien wird mit den Kindern ein Gerüst aus Faktoren und Produkten gebaut, auf das die Lernenden später, zum Beispiel bei den Flächen, den Proportionalitäten, im Bruchrechnen und bei den Primzahlzerlegungen zurückgreifen können.

Die Erfahrung zeigt, dass besonders Kinder, die im Rechnen Mühe bekunden, mit grosser Freude und Motivation mit diesen Trainingsangeboten arbeiten. Dies hängt von einigen grundsätzlichen Faktoren ab:

- Das Arbeiten mit den 1 x 1-Karten und -Quartetten gestaltet sich spielerisch und regt einen gesunden Wettbewerb unter den Kindern an.
- Durch die regelmässigen Tests erhalten die Kinder häufige Rückmeldungen über ihren Lernfortschritt.
- Die Kinder werden nur an ihrem eigenen Fortschritt und nicht am Klassendurchschnitt gemessen.
- Grosse individuelle Fortschritte, also etwa zehn oder mehr richtige Lösungen mehr als beim letzten Durchgang desselben Tests, können in der Klasse lobend erwähnt werden. Hier werden oft Kinder genannt, die sonst in der Mathematik Mühe haben. Nicht die gute Leistung, sondern der grosse Lernfortschritt wird gelobt.

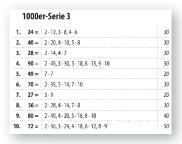
Mit der Zeit erkennen die Kinder die inneren Zusammenhänge zwischen den Reihen und Zahlen und erwerben auf spielerische Weise wichtige Fertigkeiten für den Alltag und ihre weitere Schul- und Mathelaufbahn.



# MATERIALÜBERSICHT

Diese Trainingseinheit enthält viele verschiedene Möglichkeiten, das  $1 \times 1$  zu trainieren: Quartette, 7- bzw. 3-Minuten-Trainings, Übungskarten und Testserien. Alle Materialien sind aufeinander abgestimmt. Sie stehen ab Seite 15 zum Kopieren bereit. Damit aber klar wird,

wovon in den folgenden Erläuterungen die Rede ist, seien sie hier ein erstes Mal kurz vorgestellt. Vorausgeschickt muss noch werden, dass dieses 1 × 1-Training in vier Einheiten erfolgt – in einem ersten Schritt im Zahlenraum bis 100, danach bis 200, bis 400 und zuletzt bis 1000.



#### 1 × 1-Testserien

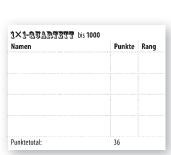
Zu jeder Trainingseinheit liegen 5 Testserien mit Zeitvorgaben vor. Die Lehrperson liest vor.

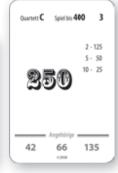


168					
2 -	84	. 8 .	21		
3 .	56	12 -	14		
4 -	42				
6 .	28				
7 ·	24				

## 1 × 1-Trainingskärtchen

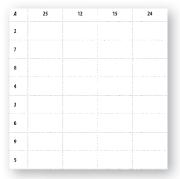
Weiter gibt es Lernkärtchen, mit welchen sich die Lernenden die Faktorisierung ausgewählter Zahlen einprägen.





#### 1 × 1-Quartettspiele

Wiederum zu jeder Trainingseinheit sind Kopiervorlagen für ein Quartett enthalten, mit welchem das 1×1 in Gruppen spielerisch geübt werden kann. Ausschneiden lässt man am besten die Kinder selbst.



## 7-/3-Minuten-Trainings und -Tests

Die Schülerinnen und Schüler füllen in vorgegebener Zeit so viele Zellen der Multiplikationsmatrix aus, wie möglich. Als Übung und als Test, um den Fortschritt zu überprüfen.



#### **Quadratzahlen-Training**

Ein besonderer Fall im 1×1 stellen die Quadratzahlen dar. Sie werden in einem separaten Teil speziell geübt.



- Faktorisierung aufzeigen (Beispiele: 30 = 2 · 15, 3 · 10, 5 · 6 ). Einige Beispiele gemeinsam lösen und auf den Trainingskarten notieren lassen. Aufzeigen, welche Faktorisierungen in diesem Zusammenhang nicht notiert werden, obwohl sie richtig sind. Das sind die Zwillingsrechnungen 15 · 2, 10 · 3, 6 · 5, sowie 1 · 30 und 30 · 1.
- 2. Erste Testserie lösen lassen pro Zerlegung 10 Sekunden Zeit geben. Diese erste Testserie erfolgt noch ohne vorgängiges Üben. Die Schülerinnen und Schüler korrigieren selbst – die Lehrperson korrigiert anschliessend ebenfalls. Seiten 8/9; Kopiervorlagen Seiten 17–20
- **3.** Fehlende Lösungen suchen lassen, an der Wandtafel oder am Hellraumprojektor vervollständigen und Trainingskarten schreiben.

Seite 8

**4.** Alle ein bis zwei Wochen eine weitere Testserie lösen – parallel dazu vervollständigen die Kinder die Trainingskarten und üben damit.

 $Seiten\,8/9; Kopiervorlagen\,Seiten\,21-26$ 

- Wenn alle 5 Testserien gelöst worden sind, von vorne beginnen und persönliche Leistungssteigerungen vermerken (zum Beispiel +7 Punkte, aber auch – 5 Punkte). Seiten 9/10
- **6.** Jetzt kann das Gruppentraining mit den Quartetten begonnen werden.

Seite 12; Kopiervorlagen Seiten 27 – 44

- 7. 7-Minuten- (3. und 4. Klasse) oder 3-Minuten-Tests (5. und 6. Klasse) und -Trainings einsetzen. Jede Wiederholung eines Tests ergibt eine direkte Rückmeldung der Leistungssteigerung.
  Seite 13; Kopiervorlagen Seiten 45 – 56
- 8. Quadratzahlen trainieren (6. Klasse)

Seite 14; Kopiervorlagen Seiten 57 – 59





#### Zahlzerlegungen

In der zweiten und dritten Klasse werden die kleinen  $1 \times 1$ -Reihen auswendig gelernt, das heisst, die Kinder können sie im Idealfall vorwärts und rückwärts aufsagen und wissen die Antworten auf spezifische Aufgaben wie  $3 \cdot 8$  oder  $7 \cdot 6$ .

Es gilt: **24 = 2 · 12, 3 · 8, 4 · 6 3 Lösungen 42 = 2 · 21, 3 · 14, 6 · 7 3 Lösungen** 

Durch die Umkehrung der Aufgabenstellung werden Zusammenhänge zwischen den Reihen sichtbar. Wir stossen auch auf Antworten, welche nicht ins kleine 1×1 gehören, aber trotz-

Im vorliegenden  $1 \times 1$ -Training wird diese Aufgabenstellung umgekehrt. Wir fragen: «Aus welchen Faktoren besteht die Zahl 24? Woraus besteht die Zahl 42?» Die Antworten darauf ( $3 \cdot 8$  und  $4 \cdot 6$  bzw.  $7 \cdot 6$ ) sind nicht die einzig möglichen, nur die offensichtlichen Antworten.

dem verwandt sind. Hier folgen weitere Beispiele, wie die Zahlen zerlegt werden können und sollen:

36 = 2 · 18, 3 · 12, 4 · 9, 6 · 6 4 Lösungen 144 = 2 · 72, 3 · 48, 4 · 36, 6 · 24, 8 · 18, 9 · 16, 12 · 12 7 Lösungen 210 = 2 · 105, 3 · 70, 5 · 42, 6 · 35, 7 · 30, 10 · 21, 14 · 15 7 Lösungen

Es gibt natürlich einige weitere ganzzahlige Faktorzerlegungen, die aber für das reine Zahlenverständnis unerheblich sind. Es sind dies die folgenden Zerlegungen:

#### $36 = 1 \cdot 36$ oder $36 \cdot 1$ sowie Zwillingsrechnungen wie $4 \cdot 9$ , $9 \cdot 4$

Es geht selbstverständlich nicht darum, dass die Kinder alle diese grossen Reihen lernen müssen. Aber sie werden mit der Zeit erkennen können, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5 usw. teilbar ist. Das Wissen um die Teilbarkeitsregeln wird sehr hilfreich sein. Diese Regeln können bei 1 × 1-Besprechungen wiederholt einfliessen, sodass die Kinder sie immer besser anwenden können.

#### Die 1 × 1-Testserien

Im praktischen Teil dieses Werkes finden sich pro Schuljahr (3./4./5./6. Klasse) je fünf Serien (100er-, 200er-, 400er- und 1000er-Serien) von  $1 \times 1$ -Tests, die jeweils 30, 40, 50 bzw. 60 Lösungen wie im obigen Muster ergeben. Diese bilden das Kernstück dieses Werkes.

Alle ein bis zwei Wochen wird ein solcher Test durchgeführt. Es dauert also etwa sechs bis neun Wochen, bis alle fünf Serien durchgetestet worden sind. Der erste Durchgang in der dritten Klasse (bzw. der 4., 5. oder 6. Klasse) kann ohne Weiteres noch ohne spezifisches Training nach einer kurzen Einführung durchgearbeitet werden. Von Anfang an wird pro Lösung zehn Sekunden Zeit gegeben, bei vier Zerlegungen also 40 Sekunden.

Um die Kinder auf diese Art 1 × 1-Training einzustimmen, kann nach dem ersten Test angeregt werden, nun alle möglichen Lösungen zu finden. Natürlich muss die Anzahl der möglichen Zerlegungen bekannt gegeben werden. Nach der Besprechung aller richtigen Lösungen kann daran gegangen werden, diese auf Trainingskärtchen zu schreiben, und die Kinder können anfangen zu trainieren. So erhält man schliesslich ein Kärtchen zu jeder Zahl, welche in diesen fünf Serien vorkommt. Die Schülerinnen und Schüler müssen die Kärtchen selbst und in Partnerarbeit kontrollieren, denn es ist wichtig, dass sie wirklich korrekt sind. Dies ist bereits ein sehr gutes Training, weil es eine intensive Beschäftigung mit diesen Zahlen bedeutet.





## Die 1 × 1-Trainingskärtchen

Auf der Vorderseite ist die aufzuteilende Zahl notiert. Rechts unten ist die Anzahl der Zerlegungen vermerkt. Die Rückseite enthält alle verlangten Zerlegungen.

Wer diesen Aufwand nicht betreiben möchte, kann die vorgefertigten 1×1-Trainingskärtchen verwenden. Optimal wäre es, die Kärtchen um eine DIN-Stufe zu vergrössern, doppelseitig auf festes Papier zu drucken und allenfalls zu laminieren

Dieses Vorgehen hat jedoch auch einen Nachteil: Da die Kinder die Kärtchen nicht selber gestaltet haben, haben sie einen kleineren Bezug zu ihnen. Es geht ein nicht zu unterschätzender Trainings- und Lerneffekt verloren. Die Kinder üben die Kärtchen fortlaufend. Nachdem alle fünf Serien einmal durchgetestet worden sind, wird begonnen, die 1 × 1-Serien ein zweites Mal zu testen. Nun wird sich zeigen, wer



wie gut trainiert hat. In jedem Testheft wird der Lernfortschritt eingetragen, sodass das Kind weiss, um wie viel es sich verbessert hat. Dabei wird nur Gleiches mit Gleichem verglichen, also Serie 1 mit Serie 1, Serie 2 mit Serie 2 usw. Im ganzen Schuljahr werden diese fünf Serien etwa drei- bis viermal durchgearbeitet. Dadurch, dass dasselbe Material immer wieder kommt und jedes Kind eine persönliche Rückmeldung zum Lernfortschritt erhält, ist die Motivation gross, diese Zahlen zu trainieren.

Zusätzlich können einige  $1 \times 1$ -Quartette zur Verfügung gestellt werden, mit denen die Kinder gemeinsam auf spielerische Art trainieren können. Ein solches Quartett pro Trainingseinheit findet sich in den Kopiervorlagen.

#### Die Arbeit mit den 1 × 1-Zahlen

Am Anfang der dritten Klasse, beim ersten Durchgang der 100er-Serien, werden erfahrungsgemäss durchschnittlich weniger als die Hälfte aller möglichen Zerlegungen gefunden. Dies spielt aber keine Rolle, denn mit obigen Trainingsvoraussetzungen lässt sich der Klassendurchschnitt auf über 85 % am Ende der sechsten Klasse steigern, wobei kaum ein Kind auf weniger als 75 % der möglichen Lösungen kommt. Gute Rechner sowie auch diejenigen der weniger guten Rechner, die intensiv trainiert haben, kommen sogar auf 95 – 100 %. Der Klassendurchschnitt ist nur für die Lehrperson interessant, die Kinder bekommen diesen nie zu

Gesicht, denn er demotiviert vor allem jene, die zwar trainiert haben, jedoch trotzdem unter dem Durchschnitt liegen.

Wenn die Klasse neu mit diesen 1 × 1-Zahlen trainiert, empfiehlt es sich, mit der nächsttieferen Stufe zu beginnen. Haben die Viertklässler in der dritten Klasse nicht mit diesen Materialien gearbeitet, so sollte mit den 100er-Serien begonnen werden – die Zahlen der 200er-Serien sind zu Beginn noch zu schwierig. Nach zwei Umgängen mit den 100er-Serien kann dann auf die 200er-Serien umgestellt werden. Ebenso sollte in der fünften und sechsten Klasse verfahren werden.

#### Die persönliche Leistungsfähigkeit im Spiegel der Tests

Nach einer kurzen Einführungsphase diktiert die Lehrperson die Zahlen aus Test 1. Die Kinder schreiben sie ins Heft und fügen alle Lösungen an, welche sie finden. Je nach Anzahl möglicher Lösungen wird mehr oder weniger Zeit gegeben, in der Regel sind es zehn Sekunden pro Lösung. Dann folgt die nächste Zahl. Nach der letzten Zahl wird sofort korrigiert: Die Lösungen





werden in der Klasse genannt, und jedes Kind korrigiert die eigenen Lösungen mit einer anderen Farbe.

Zum Schluss addieren die Kinder die Anzahl der richtigen Lösungen und schreiben zusätzlich die Maximalpunktzahl hin: Je nach Trainingseinheit 30, 40, 50 oder 60 Punkte. Dann geben sie die Hefte ab und die Lehrperson korrigiert sie ebenfalls. Es ist sehr wichtig, jedes Kind an der persönlichen Leistung zu messen und nicht an der Klasse. Wenn die persönliche Leistung als Massstab dient, ist die Motivation für jedes Kind gross, sich zu verbessern, insbesondere dann, wenn mehrere verschiedene Trainingsmöglichkeiten offen stehen.

#### Ein Beispiel aus der vierten Klasse

Vera verzeichnet eine Steigerung von 12 Punkten auf 23 Punkte (Eintrag im Heft: + 11 P.) – ein gewaltiger Lernfortschritt, vor allem, weil es sich um eine wenig begabte Rechnerin handelt. Dieses Kind hat sich Mühe gegeben und viel trainiert. Ein guter Rechner hingegen, Peter, hat vielleicht gedacht, er könne es ja sowieso, er brauche nicht zu üben. Er hat sich um 3 Punkte verschlechtert und hat 32 richtige Lösungen erreicht. Dies wird – ohne Wertung – im Heft vermerkt: (- 3 P.). Nun, welches Resultat ist besser? Absolut gesehen ist Peters Resultat von 32 Punkten natürlich besser als Veras Leistung von 23 Punkten. Wenn eine Note gegeben würde, bekäme Peter eine weit bessere als seine Kameradin. Aber ist das auch gerecht? Er hat sich ja gar nicht angestrengt für seine gute Leistung, im Gegenteil. Veras Lernfortschritt bedeutet die bessere Leistung, welche sogar hervorgehoben werden kann. Diejenigen, die sich um mehr als 10 Punkte gesteigert haben, werden gebeten, aufzustehen: Sie haben einen herzlichen Applaus verdient. Und das Schöne dabei ist, hier werden Kinder gelobt und hervorgehoben, die meistens schwächer sind in diesem Fach, und dies wirkt ausgesprochen motivierend. Die Freude am Lerngegenstand wächst, und jemand wie Vera lässt einen solchen Lernfortschritt nicht

mehr sausen. Sie übt weiter und wird am Ende der sechsten Klasse bei einem Resultat von 80–85% oder sogar mehr angelangt sein. Wettbewerb mit sich selbst stärkt und fördert jedes Kind.

Peter hingegen, der einen Rückschritt zu verzeichnen hat, kann und muss dies auf sein eigenes Trainingsverhalten zurückführen. Die Rückmeldung (– 3 P.) wird seinen Ehrgeiz anstacheln und ihn dazu motivieren, wieder zu trainieren. Wenn dies aber über eine gewisse Zeit nicht der Fall sein sollte, muss die Lehrperson das Gespräch mit Peter suchen.

Auf der Klassenliste, wo die Resultate aller Kinder vermerkt werden, können Resultate unter 50 % zum Beispiel rot, Resultate ab 50 % bis 80 % blau und Resultate ab 80 % grün geschrieben werden. So werden die Leistungssteigerungen in der Klasse optisch sehr gut ersichtlich. Dies ist aber nur für die Lehrperson interessant – eine solche Liste sollte nicht – oder allenfalls anonymisiert – in der Klasse gezeigt werden.

Anonymisiert heisst in diesem Fall: nicht nur die Namen, sondern auch deren Reihenfolge verändern. Es werden auch keine Zahlen bekannt gegeben, sondern die Felder werden nur in der entsprechenden Farbe ausgemalt.

#### Mogeln beim Korrigieren

Es kommt leider vor, dass einzelne Kinder ungenau korrigieren. Vielleicht haben sie das Resultat nicht richtig gehört und machen ein Häkchen daneben, anstatt nachzufragen. Oder sie wollen ihr Resultat beschönigen und korrigieren absichtlich falsch – merkts die Lehrperson wohl?



– Ja, sie sollte es merken. Diese Kinder müssen darauf aufmerksam gemacht werden, dass falsches Korrigieren nicht gestattet ist und sanktioniert wird. Ich habe in diesen Fällen jeweils die richtigen Resultate gezählt und davon die Anzahl der falsch korrigierten subtrahiert (falsch korrigiert: – 3 P.).

## **Umfang der Trainingseinheiten**

Die Trainingseinheiten sind den einzelnen Jahrgangsklassen angepasst.

Die Einheit bis 100 für die dritte Klasse umfasst alle relevanten 1×1-Zahlen der Reihen 2 bis 10, das heisst, alle verwendeten Zahlen sind in diesen Reihen zu finden, wobei alle anderen möglichen Zahlzerlegungen ebenfalls eingeübt werden.

Ein Beispiel: **36 = 4 · 9 und 6 · 6.** Diese beiden Zerlegungen gehören in den Bereich der dritten Klasse. Die andern Zerlegungen **2 · 18 und 3 · 12** werden ebenfalls eintrainiert; wichtig ist, dass die Kinder merken, dass 36 auch durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Eine Ausnahme bildet die 84, welche nicht direkt in den Bereich der dritten Klasse gehört. Diese Zahl erscheint erstmals in der 12er-Reihe. Ich habe sie aus zwei Gründen trotzdem verwendet: In den 1×1-Tests der 100er-Serien sollen in jeder Serie 30 Punkte erreicht werden. Dies ist nicht möglich, ohne die Zahl 84 zu verwenden.

Für die Quartette braucht es mindestens 4 verschiedene Zahlen, die gleich viele Lösungen enthalten. Dies wäre ohne die 84 in der dritten Klasse nicht möglich gewesen.

Die Trainingseinheit bis 200 für die vierte Klasse enthält zusätzlich Zahlen der 11er-Reihe, alle Zahlen der 12er- und der 15er-Reihe sowie einige Zahlen der 24er- und 25er-Reihe. Dazu kommen einige Zahlen aus den Zehner-1 × 1-Reihen. Die Trainingseinheit bis 400 für die fünfte Klasse enthält alle bisherigen «schwierigen» oder «wichtigen» Zahlen (die Zahlen, welche in mehreren Reihen vorkommen und somit viele Zerlegungen haben), zusätzlich alle Zahlen der 24erund 25er-Reihe sowie einige der 125er-Reihe. Mit dabei sind einige weitere Zahlen aus den Zehner-1 × 1-Reihen.

In der Trainingseinheit bis 1000 für die sechste Klasse schliesslich kommen alle bisherigen «wichtigen» Zahlen vor sowie alle Zahlen der 125er-Reihe bis 1000.

#### Rechenvorteile

Beim Arbeiten mit den 1 × 1-Zahlen fällt manchen Rechnern und Rechnerinnen auf, dass die Zahlen manchmal ganz einfach und schnell zerlegt werden können, wenn man gewisse Tricks anwendet. Zunächst kann es sein, dass sie diese Tricks als Mogelei empfinden. Das ist es natürlich nicht, denn sie wenden Rechenvorteile an, welche das Zahlenverständnis erhöhen.

Einige Beispiele zur Illustration:

1.  $240 = 2 \cdot 120, 4 \cdot 60, 8 \cdot 30, 16 \cdot 15$ 

2.  $240 = 3 \cdot 80, 6 \cdot 40, 12 \cdot 20, 24 \cdot 10, 48 \cdot 5$ 

3.  $240 = 10 \cdot 24, 5 \cdot 48$ 

4.  $240 = 3 \cdot 80, 8 \cdot 30, 4 \cdot 60, 6 \cdot 40$ 

5. 240 = 2 · 120, 3 · 80, 4 · 60, 5 · 48, 6 · 40, 7 · geht nicht, 8 · 30, 9 · geht nicht etc.





Im ersten Beispiel ist erkannt worden, dass die gegebene Zahl durch 2 teilbar ist, und nachher wurde jeweils der erste Faktor verdoppelt und der zweite halbiert. Hier steckt die Erkenntnis dahinter, dass sich bei konstantem Produkt die Faktoren in gegenläufiger Richtung verändern, je mehr desto weniger. Es handelt sich also um eine indirekte Proportionalität.

Beim zweiten Beispiel wurde erkannt, dass 240 eine Dreierzahl ist, danach wurde analog zum ersten Beispiel verdoppelt bzw. halbiert. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Lösung z. B.  $48 \cdot 5$  oder  $5 \cdot 48$  heisst; sie darf einfach nur einmal vorkommen, weil es eine Zwillingsrechnung ist. Mit den beiden ersten Rechenarten bringt man schon sehr viele Lösungen heraus, hier sogar alle.

Im dritten Beispiel ist zuerst erkannt worden, dass eine Zahl, die zuhinterst eine 0 besitzt, eine Zehnerzahl und somit auch eine Fünferzahl ist. Das vierte Beispiel zeigt auf, dass man die Lösungen «verdrehen» kann, ohne dass gleich Zwillingsrechnungen daraus entstehen.

Im fünften Beispiel wurden die Faktoren der Reihe nach ausprobiert. Dabei ist natürlich wichtig, dass die Teilbarkeitsregeln bekannt sind. Man kann dann aufhören, wenn der erste Faktor sehr nah beim zweiten Faktor liegt, oder beide Faktoren sogar gleich sind.

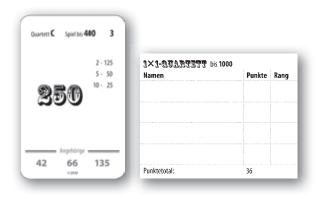
Es ist wichtig, dass die Kinder dazu ermuntert werden, solche «Tricks» anzuwenden, denn sie fördern das Zahlenverständnis in hohem Masse.

## Die 1 × 1-Quartettspiele

Es macht natürlich viel mehr Spass, die 1 × 1-Zahlen zu trainieren, wenn man dies auf spielerische Art tun kann. Deshalb habe ich für jede Trainingseinheit ein Quartettspiel mit je acht oder neun Quartetten hergestellt. Diese enthalten dieselben Zahlen, die auf den 1 × 1-Kärtchen und in den Tests vorkommen. Jedes Quartett umfasst vier Zahlenkarten, welche dieselbe Anzahl Zerlegungen aufweisen. Diese Anzahl ist oben rechts auf jeder Karte vermerkt (im Beispiel: 3 Zerlegungen). Jede Quartettkarte hat oben links einen Kennbuchstaben, sodass sie eindeutig einem Quartett zugeordnet werden kann (Beispiel: C).

Im nebenstehenden Beispiel hat jede Zahl aus dem Quartett 3 Lösungen. Für die gross gedruckte Zahl sind alle Lösungen angegeben. Unter dem Strich sind die anderen Zahlen aus dem Ouartett.

Gespielt wird nach den Spielregeln, welche jedem Quartettspiel beigefügt sind. Schliesslich werden auf der Kontrollkarte die erreichte Punktzahl und der Rang festgehalten. Es empfiehlt sich, die Quartettspiele auf farbiges Papier zu drucken. Jedes Quartettspiel sollte eine



eigene Farbe haben, sodass die Karten nicht verwechselt werden können. Die Kinder können die karten gleich selber ausschneiden.

Im selbstständigen Unterricht, zum Beispiel während der Wochenplanzeit oder in freien Arbeitsstunden, können diese Spiele gespielt werden. Natürlich kann auch speziell Unterrichtszeit zur Verfügung gestellt werden, beispielsweise um die Spiele einzuführen. Manchmal wollen die Kinder die Spiele sogar mit nach Hause nehmen, um mit Geschwistern oder den Eltern zu spielen. Dies ist eine weitere Motivation, zu üben.



## Das 7-Minuten- und das 3-Minuten-Training

Zu Beginn des Trainings können 7-Minuten-Trainings angeboten werden, welche alle kleinen  $1 \times 1$ -Reihen beüben. Dies sind 100 Rechnungen. Sobald alle kleinen Reihen gelernt worden sind, kann damit angefangen werden. Diese Trainings wecken einen grossen Lerneifer. Die ganz Schnellen können ein zweites Blatt bearbeiten. Ich habe erlebt, dass ein Kind zweieinhalb Blätter mit je 100 Resultaten in den gegebenen 7 Minuten gelöst hat, ohne einen einzigen Fehler! Um die Herausforderung zu erhöhen und das Interesse an den Trainings wach zu halten, kann nach und nach die Zeit um 15 oder 30 Sekunden reduziert werden, zum Beispiel bei Überschreiten des 90 %-Klassendurchschnittes. Ein weiteres beliebtes 1×1-Training ist das Training der 12er-, 15er-, 24er- und 25er-Reihe, welches etwa ab Ende der vierten Klasse eingesetzt werden kann. Gegen Ende der fünften oder in der sechsten Klasse kommt noch die 125er-Reihe dazu. Anfänglich haben die Kinder 3 Minuten Zeit, diese kleine Tabelle mit den 32 oder 40 Rechnungen zu lösen, wobei es auch hier zunächst unerheblich ist, wie viele Aufgaben sie richtig lösen. Sehr schnell steigert sich die Erfolgsquote, vor allem dann, wenn vor dem ersten Einsatz nicht geübt wurde. Sobald ein Klassendurchschnitt von 90% erreicht wird, kann auch hier die Zeit verkürzt werden. So entsteht immer wieder eine neue Herausforderung. Am Ende der sechsten Klasse kann der Test in 75 Sekunden gelöst werden. Dies entspricht praktisch der Schreibgeschwindigeit, um die Tabelle auszufüllen; man muss die Zahlen also auswendig können. Dabei ist die Anordnung der Zahlen immer wieder anders. Die Erfolgsquote am Ende der sechsten Klasse beträgt nach meiner Erfahrung durchschnittlich über 95 %! Auch hier sind die Kinder hochmotiviert, zu trainieren, weil dieser Test immer wieder gemacht wird und die persönlichen Trainingserfolge jedesmal notiert werden.

Bei diesen Serien kann jeder Test direkt mit dem vorhergehenden verglichen werden, denn es sind ja dieselben Rechnun-

Α	25	12	15	24
2				
7				
8				
4				
3				
6				
9				
5				

gen, nur die Anordnung ist unterschiedlich. Zwar liegen zu den Trainings- und Testblättern Lösungen vor, es empfiehlt sich aber, die Kinder selber oder in Partnerarbeit korrigieren zu lassen, ohne ihnen die vorbereiteten Lösungen auszuhändigen. Der Lerneffekt ist grösser! Solche 7-Minuten- oder 3-Minuten-Tests und -Trainings können ohne Weiteres selber mit einer Excel-Tabelle am Computer hergestellt und verändert werden. Veränderung könnte bedeuten, dass die ganz schnellen Rechner, anstatt die Einer- und Zehner-Reihe zu lösen, mit der Zwölfer- und Fünfzehner-Reihe «gefüttert» werden, oder die Einer- und Zehner-Reihen ganz weggelassen werden, sodass Tabellen mit 8 mal 8 Zahlen entstehen, welche logischerweise in kürzerer Zeit, zum Beispiel in anfänglich 6 Minuten, gelöst werden müssen.

Bei den 7-Minuten-Trainings und -Tests empfehle ich, die Seiten um eine DIN-Stufe auf A3 zu vergrössern, sonst sind die Felder für die Resultate etwas klein.

Diese Tests benötigen nicht viel Zeit, doch der Erfolg ist gross. Die Zahlen ergeben mit der Zeit ein Netz, mit dem die Lernenden arbeiten können, und das Zahlenverständnis wird erheblich gesteigert. Durch das immerwährende Training wird der Stoff gefestigt. Auch hier können selbstverständlich Rechenvorteile angewendet werden.

Ab Seite 45 sind einige solcher Übungen und Tests zu finden, die so vorbereitet sind, dass sie direkt im Unterricht eingesetzt werden können.

#### Die Quadratzahlen

In der sechsten Klasse können die Quadratzahlen auf dieselbe Art geübt werden. Auch hier werden Trainingsserien zur Verfügung gestellt, welche ebenfalls in gleichmässigen Abständen von etwa einer bis zwei Wochen getestet werden.

Die Übungs- und Testserien sehen wie rechts abgebildet aus, wobei die Anordnung der Zahlen wie beim 3-Minuten- und 7-Minuten-Training variiert wird. Solche Serien können sehr einfach am Computer selber hergestellt werden. Trotzdem sind einige Serien am Schluss dieses Werkes angefügt.

Einzelne Kinder interessieren sich vielleicht für die Zusammenhänge zwischen den Quadratzahlen. Sie können Untersuchungen an den Quadratzahlen vornehmen, zum Beispiel, indem sie untereinander verglichen werden.

Notiere die Quadratzahlen zu den folgenden Zahlen.					QZ 1		
Zahl	Quadratzahl	Zahl	Quadratzahl	Zahl	Quadratzahl	Zahl	Quadratzahl
5		15		2		6	
3		13		9		21	
17		4		11		16	
12		19		14		24	
8		22		25		18	
20		7		23		10	

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen? Was entsteht, wenn man Quadratzahlen miteinander multipliziert? Wie können die Resultate interpretiert oder erklärt werden?

Auf diese Weise können interessante Entdeckungen gemacht werden, und das Zahlenverständnis wird weiter gefördert und gefestigt. Für die Quadratzahlen bis 100 kann gegen Ende der sechste Klasse ein einfaches Prinzip (die *binomischen Formeln*) gegeben werden, wie diese schnell im Kopf ausgerechnet werden können:

(a + b)<sup>2</sup> = a<sup>2</sup> + 2ab + b<sup>2</sup>  
Ein Beispiel: 
$$46^2$$
 (a = 40, b = 6), d. h.  $(40 + 6)^2$   
 $40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 6 + 6^2 = 1600 + 480 + 36 = 2116$   
oder (a - b)<sup>2</sup> = a<sup>2</sup> - 2ab + b<sup>2</sup>  
 $46^2$  (a = 50, b = 4), d. h.  $(50 - 4)^2$   
 $50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 4 + 4^2 = 2500 - 400 + 16 = 2116$ 

Auch das fördert die Rechenfertigkeiten ausserordentlich.

Für Quadratzahlen über 100 kann die folgende trinomische Formel angewendet werden:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Dies ist allerdings nur etwas für Rechengenies; für die Mittelstufe reichen selbstverständlich die Formeln für Quadratzahlen bis 100.

			1
12	15	16	18
20	21	<b>24</b>	<b>25</b>
27	28	30	32
35	36	40	42
2	4	49	50
<b>54</b>	<b>5</b> 6	5	2
<b>64</b>	70	<b>72</b>	<b>30</b>
<b>31</b> 2	<b>84</b>	<b>90</b> 5	100



18 2 · 9 3 · 6	<b>16</b> 2 · 8 4 · 4	<b>15</b> 3 · 5	<b>12</b> 2 · 6 3 · 4
<b>25</b> 5 · 5	24 2 · 12 3 · 8 4 · 6	<b>21</b> 3 · 7	<b>20</b> 2 · 10 4 · 5
<b>32</b> 2 · 16 4 · 8	30 2 · 15 3 · 10 5 · 6	<b>28</b> 2 · 14 4 · 7	<b>27</b> 3 · 9
<b>42</b> 2 · 21 3 · 14 6 · 7	<b>40</b> 2 · 20 4 · 10 5 · 8	36 2 · 18 3 · 12 4 · 9 6 · 6	<b>35</b> 5 · 7
<b>50</b> 2 · 25 5 · 10	<b>49</b> 7 · 7	<b>48</b> 2 · 24 3 · 16 4 · 12 6 · 8	<b>45</b> 3 · 15 5 · 9
<b>63</b> 3 · 21 7 · 9	60 2 · 30 3 · 20 4 · 15 5 · 12 6 · 10	<b>56</b> 2 · 28 4 · 14 7 · 8	<b>54</b> 2 · 27 3 · 18 6 · 9
<b>80</b> 2 · 40 4 · 20 5 · 16 8 · 10	72 2 · 36 3 · 24 4 · 18 6 · 12 8 · 9	<b>70</b> 2 · 35 5 · 14 7 · 10	64 2 · 32 4 · 16 8 · 8
100 2 · 50 4 · 25 5 · 20 10 · 10	<b>90</b> 2 · 45 3 · 30 5 · 18 6 · 15 9 · 10	<b>84</b> 2 · 42 3 · 28 4 · 21 6 · 14 7 · 12	<b>81</b> 3 · 27 9 · 9







# 1×1-TRAINING

Spielregeln Teil **1** Spiel bis 100

#### Spielregeln

- 1. Anzahl Spielerinnen: 2 bis 4
- 2. Alle Karten verteilen
- 3. Die Spielerin rechts der Verteilerin fragt eine Mitspielerin nach einer Karte, beispielsweise: «Hast du 36?»
- 4. Lautet die Antwort «Nein», darf die gefragte Person weiterfragen.
- 5. Wenn die Antwort «Ja» lautet, sagt die fragende Spielerin die Lösungen:  $\ll 36 = 2 \cdot 18, 3 \cdot 12, 4 \cdot 9, 6 \cdot 6.$ »
- 6. Falls die Lösungen stimmen, bekommt sie die Karte und darf

©7KM

## 1×1-TRAINING

Spielregeln Teil **2** 

Spiel bis 100

weiterfragen, falls sie nicht stimmen oder unvollständig sind, darf die gefragte Person weiterfragen.

- 7. Die vollständigen Quartette werden abgelegt.
- 8. Am Schluss werden die Lösungen pro Quartett zusammengezählt (Quartett mit 2 Lösungen + Quartett mit 4 Lösungen = 6 Punkte).
- 9. Die Spielerin mit den meisten Punkten hat gewonnen.
- 10. Kontrolle: Alle Quartette zusammen ergeben 21 Punkte.

© ZKM

2 · 5

27

1

3. 9

Angehörige :

25 21

©ZKM

Quartett A

Spiel bis 100

3 · 7

27

1

2 · 7

1

Angehörige :

10

25

©ZKM

Spiel bis 100 Quartett **A** 

5 · 5

1



Angehörige

10

21 ©ZKM 27

Quartett A

Spiel bis 100

Quartett **B** 

Spiel bis 100

Quartett **B** 

Spiel bis 100

3 . 5

1

Angehörige =

10

21 ©ZKM 25

15

35 49

©ZKM

Angehörige =

Angehörige

14

49

35 © ZKM





1 Quartett **B** Spiel bis 100

5 · 7

Angehörige = 14 15 49

1 Quartett  ${f B}$ Spiel bis 100

7 · 7

Angehörige = 14 15 35 ©ZKM

2 Quartett C Spiel bis 100

2 · 6

3 · 4

Angehörige =

18 28 45

2 Quartett C Spiel bis 100

2 . 9

3 · 6

Angehörige = 12 28 45 Quartett C Spiel bis 100 2

2 · 14

4 · 7

Angehörige = 12 18 45

©ZKM

Spiel bis 100 2 Quartett **C** 

3 · 15

5 · 9

Angehörige =

12 18 28

Spiel bis 100

2

2 · 25

5 · 10

2 Quartett **D** Spiel bis 100

2 · 8

4 · 4

= Angehörige = **32 50** 63 ©ZKM

2 Quartett **D** Spiel bis 100

2 · 16

63

Angehörige =

16 **50** 

©ZKM

Quartett **D** 

Angehörige 🕳

16 **32** 63 ©ZKM

# QUARTETTSPIEL BIS 100



2 Spiel bis 100 Quartett **D** 

3 · 21

7 · 9

= Angehörige = 16 32 **50** 

3 Quartett **E** Spiel bis 100

2 · 12

3 · 8

Angehörige =

40 54 64

Spiel bis 100

3 Quartett **E** Spiel bis 100

2 · 20

4 · 10

5 · 8

Angehörige =

24

54

3 Quartett **E** Spiel bis **100** 

2 · 27

3 · 18

6 · 9

Angehörige =

24 40

Quartett **E** 

24

Quartett **F** 

8 · 8

2 · 32

4 · 16

3

Angehörige :

40

©ZKM

Spiel bis 100

**54** 

3

2 · 28

4 · 14

7 · 8

**70** 

Spiel bis 100 3 Quartett **F** 

2 · 15

64

3 · 10

5 · 6

Angehörige =

42

56 **70** 

Spiel bis 100 3 Quartett **F** 

2 · 21

64

3 · 14

6 · 7

**70** 

= Angehörige =

56

©ZKM

30

Angehörige =

30 42

©ZKM

Spiel bis 100 Quartett **F** 

 $2 \cdot 35$ 

3

5 · 14

7 · 10

= Angehörige =

30 42 56

©ZKM



© ZKM

# QUARTETTSPIEL BIS 100

Spiel bis 100 4 Quartett **G** 

2 · 18

3 · 12

6 · 6

Angehörige =

48 80

100

Quartett **G** Spiel bis 100 4

2 · 40

4 · 20

5 · 16

8 · 10

100

Spiel bis 100 Quartett **G** 

2 · 24

4

3 · 16

4 · 12

6 · 8

= Angehörige =

36 80 100

4 Quartett **G** Spiel bis 100

 $2 \cdot 50$ 

4 · 25

5 · 20

10 · 10

= Angehörige =

36

60

48

80

5 Spiel bis 100 Quartett **H** 

Angehörige =

48

36

2 · 30

3 · 20

4 · 15

5 · 12

6 · 10

Angehörige :

**72** 84

©ZKM

90

5 Spiel bis 100 Quartett **H** 

2 · 36

3 · 24

4 · 18

6 · 12

8 . 9

90

Angehörige =

60

84

Spiel bis 100 5 Quartett **H** 

Angehörige =

**72** 

©ZKM

 $2 \cdot 42$ 

3 · 28

4 · 21

6 · 14

7 · 12

90

5 Spiel bis 100 Quartett **H** 

2 · 45

3 · 30

5 · 18

6 · 15

9 · 10

Angehörige =

84 60

©ZKM

**72** 

Spiel bis 100 Quartett

Angehörige =



# 1×1-TRAINING

Vernetztes Kopfrechnen auf der Mittelstufe

Nach einem gründlichen Aufbau des  $1 \times 1$  in der Unterstufe ist es entscheidend, diese Grundlagen in der Mittelstufe weiter zu entwickeln. Aus Rücksicht auf die schwächeren Schülerinnen und Schüler wird das Kopfrechnen oft nicht mehr im Klassenverband gepflegt. Für das grundlegende Zahlenverständnis ist es aber unabdingbar, die Grundzahlbeziehungen möglichst locker abrufen zu können.

Genau an diesem Punkt setzt dieses  $1 \times 1$ -Training an: Mit Karteikarten und im weiteren Verlauf auch mit Quartettspielen wird die Faktorisierung der Zahlen trainiert. Regelmässige Kurztests zeigen den Kindern ihren Trainingserfolg auf. Dabei werden nicht Noten geschrieben, sondern der Fortschritt gegenüber der vorhergehenden Arbeit gelobt. Mit Übungsportionen von fünf Minuten pro Tag wird das Klassenniveau stetig gesteigert. Zum Einstieg rücken die Zahlen aus dem Zahlenraum bis 100 ins Zentrum. Im Anschluss wird eine Auswahl der Zahlen bis 1000 trainiert.

Das Lehrmittel ist so aufgebaut, dass über drei Mittelstufenjahre sinnvoll, lustvoll und zielorientiert trainiert werden kann.







